Legyen $(R;+,\cdot)$ egy tetszőleges integritástartomány. Bármely $a,b \in R$ esetén azt mondjuk, hogy a osztója b-nek, ha van olyan $c \in R$ elem, amelyre $b = ac$. Formálisan:

$$a \mid b \iff \exists c \in R\colon b = ac.$$

Az alábbiakban az oszthatósági reláció néhány tulajdonsága olvasható. Töltse ki a hiányzó részeket, és indokolja meg a bizonyítások lépéseit. Az indoklásoknál (mindig a *mert* szó utáni rész) az integritástartomány definíciójában szereplő kilenc műveleti tulajdonság valamelyikére kell hivatkozni (pl. az összeadás asszociativitása, zérusosztómentesség, stb.)

Tétel. *Az oszthatóság reflexív reláció:* $\forall a \in R\colon a \mid a$.

Biz. Azt kell belátnunk, hogy van olyan $c \in R$ elem, amelyre $a =$ .... Ilyen elem valóban létezik, mert .... □

Tétel. *Az oszthatóság tranzitív reláció:* $\forall a,b,c \in R\colon a \mid b$ *és* $b \mid c \implies$ ....

Biz. Tegyük fel, hogy $a \mid b$ és $b \mid c$, vagyis léteznek olyan $u,v \in R$ elemek, amelyekre $b =$ .... és $c =$ .... Ekkor $c =$ ...., mert ...., és ez igazolja az állítást. □

Tétel. *A multiplikatív egységelem mindenkinek osztója:* $\forall a \in R\colon 1 \mid a$.

Biz. Azt kell belátnunk, hogy van olyan $c \in R$ elem, amelyre .... Világos, hogy a $c =$ .... elem megfelelő lesz. □

Tétel. *Az additív egységelem mindenkivel osztható:* $\forall a \in R\colon a \mid 0$.

Biz. Azt kell belátnunk, hogy van olyan $c \in R$ elem, amelyre .... Az előadásvázlatban szereplő 2.3. Állítás szerint a $c =$ .... elem megfelelő lesz. □

Tétel. *Bármely $a,b,c \in R$ esetén, ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid b+c$.*

Biz. Tegyük fel, hogy $a \mid b$ és $a \mid c$, vagyis léteznek olyan $u,v \in R$ elemek, amelyekre .... és .... Ekkor $b+c =$ ...., mert .... Ezzel beláttuk, hogy $a \mid b+c$. □