Trabalho 5
Métodos Computacionais da Física B

Esteban Gerling - 00231223

12 de julho de 2016

Introdução

Este trabalho é sobre o estudo de um mapa, em específico sobre o mapa de *Arnold tongue*[1] descrito na equação (1) apresentada abaixo:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega - \frac{k}{2\pi} sen(2\pi\theta_n), \tag{1}$$

onde o parâmetro k será estudado no intervalo de 0 até 4π, os valores de θ_n serão estudados no intervalo $[0, 1]$ e o parâmetro ω, a princípio, será um valor fixo $\omega = 1/3$.

Uma aplicação do problema descrito acima é no sincronismo de diodos túnel (*resonant-tunneling diode*), que é um tipo de semicondutor extremamente rápido capaz de operar em frequências da ordem de GHz através da utilização de um efeito da mecânica quântica chamado de tunelamento[1][2].

O parâmetro ω utilizado neste estudo será fixado, conforme informado acima, para obter-se um *mode-locking*, parâmetro este que está relacionado com o ruído de sinal[1], e estudar a resposta do sistema à variação do parâmetro k.

1 Encontrando os pontos fixos de primeira ordem

Para encontrar os pontos fixos precisamos que $\theta_{n+1} = \theta_n$, ou seja:

$$\omega = \frac{k}{2\pi} sen(2\pi\theta_n). \tag{2}$$

Resolvendo a equação para θ_n temos:

$$\theta_n = \frac{1}{2\pi} arcsen\left(\frac{2\pi\omega}{k}\right) = \theta^*. \tag{3}$$

Para estes valores de $\theta_n = \theta^*$ encontramos pontos fixos de primeira ordem dependentes de k.

1.1 Determinando o intervalo de estabilidade

Para encontrarmos o intervalo de estabilidade dos pontos fixos temos que o módulo da derivada da função $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ deve ser menor do que 1, ou seja, $f'(\theta_n)$deve estar entre -1 e 1. Isto deve-se ao fato de que analisando a função em um ponto fixo, quando ocorre uma pequena perturbação (θ^* vai para um ponto $\theta_n + \epsilon_n$) a função retorna para um ponto fixo θ^*, onde ϵ_n é uma pequena perturbação. Assim seguindo as iterações para o próximo valor de θ_n, o próximo ponto seria $\theta_{n+1} + \epsilon_{n+1}$

Pode-se verificar, através de uma expansão de $f(\theta_n + \epsilon_n)$ em torno de $\theta_n = \theta^*$, que para que exista estabilidade deve ocorrer que $|\epsilon_n| > |\epsilon_{n+1}|$, ou seja, quando n aumenta a função se aproxima do ponto fixo θ^*.

Temos então que a derivada da função 1 a ser estudada é:

$$f'(\theta_n) = 1 - k(cos(2\pi\theta_n)). \tag{4}$$

Substituindo a equação 3 em 4 e fazendo o módulo menor do que 1 temos o intervalo de estabilidade para pontos fixos de primeira ordem:

$$|1 - k[cos\left(arcsen\left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)\right)]| < 1. \tag{5}$$

Para encontrar valores de k que satisfaçam esta inequação, foi feito um programa que varia o parâmetro k no intervalo $[0, 4\pi]$ e testa a equação 5 para cada k e também testa se para estes valores a variável θ_n está dentro do domínio a ser estudado que é $[0, 1]$, e guarda os valores de k e θ_n para os quais estes testes são verdadeiros.

A base do programa em C é a seguinte:

```
for (k=(0);k<=(4*M_PI);k=k+0.01)
{
        estab=modulo(x,k,omega);

        dom=intervalo(x,k,omega);

        if((estab<1)&&(dom>0)&&(dom<1))
        {
            fprintf(arq1,"%lf %lf\n",dom,k);
            n++;
        }
        printf("%f\n",k);
}
fclose(arq1);
```

Onde a variável x é o θ_n e as funções *estab* e *dom* são funções das equações 5 e 3 respectivamente, são as seguintes:

```
double modulo (double a, double b, double c) //a=x, b=k, c=omega;
{
    return (fabs(1-((b)*(cos(asin((2*M_PI*c)/(b)))))));
}

double intervalo (double d, double e, double f) //d=x, e=k, f=omega;
{
    return ((1.0/(2.0*M_PI))*(asin((2*M_PI*f)/(e))));
}
```

Para valores que o módulo do termo $arcsen\left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)$ resultaria em um valor maior do que 1 não existe resultado, pois o valor do *seno* deve estar compreendido no intervalo $[-1, 1]$, isto ocorre para valores de k entre -2.086371 e 2.093629.

Com a execução do programa verificou-se que o intervalo de estabilidade é entre $k > \frac{2\pi}{3}$ e $k \approx 0.92\pi$.

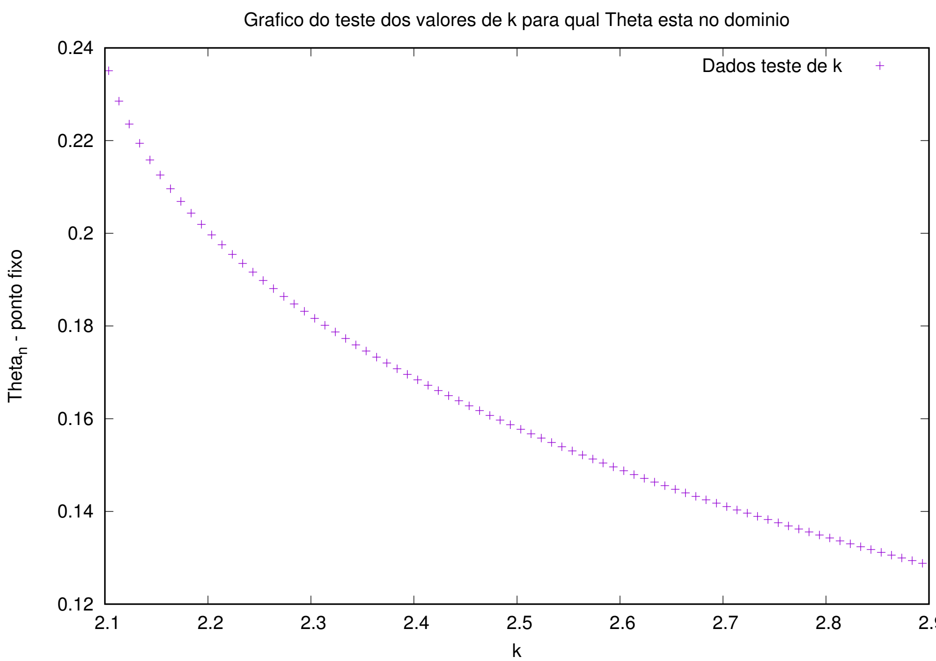


Figura 1: Gráficos da variação dos valores de k para verificar θ dentro do intervalo do domínio $[0, 1]$. Verificação de pontos fixos

Na figura abaixo podemos verificar, para valores iniciais de $\theta_n = 0.1$, o que ocorre conforme se varia k dentro do intervalo de estabilidade quando n aumenta.

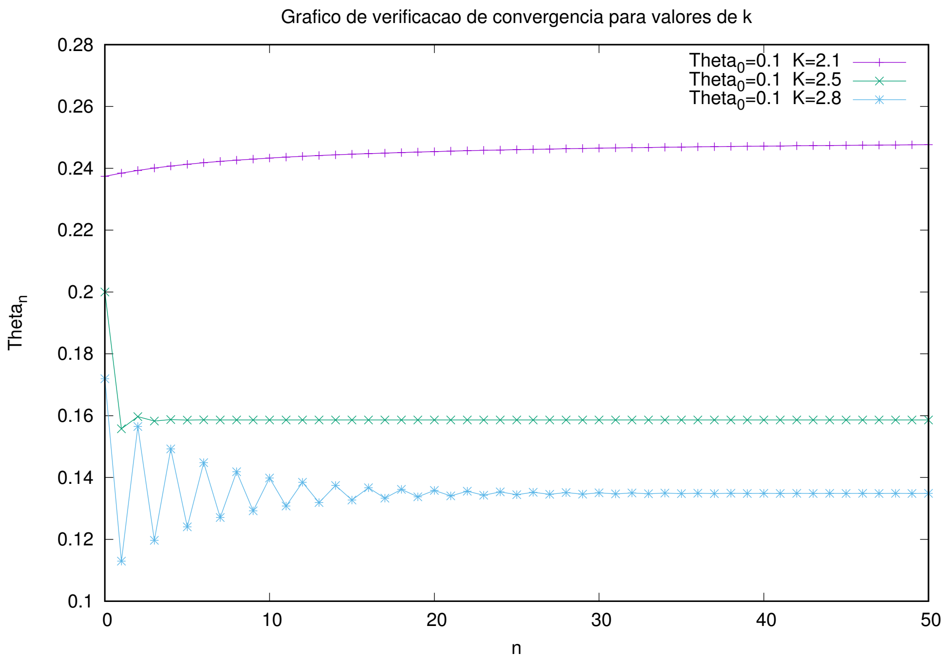


Figura 2: Gráficos da variação de k com n para valores de k dentro do intervalo de estabilidade.

Conforme verificado na Figura 2, para um número n grande de iterações, os valores de θ_n convergem para uma solução assimptótica. Foi executado o programa para $n = 1000$, porém só foi plotado o intervalo de interesse n entre 0 e 50, pois para valores maiores de n podia-se ver que a solução era assimptótica, mas não se enchergava a parte interessante que é os valores de θ_n oscilando e convergindo.

Na Figura 3 abaixo pode ser visto o que ocorre quando $k = 0.92\pi$ (muito próximo ao limite do intervalo de estabilidade):

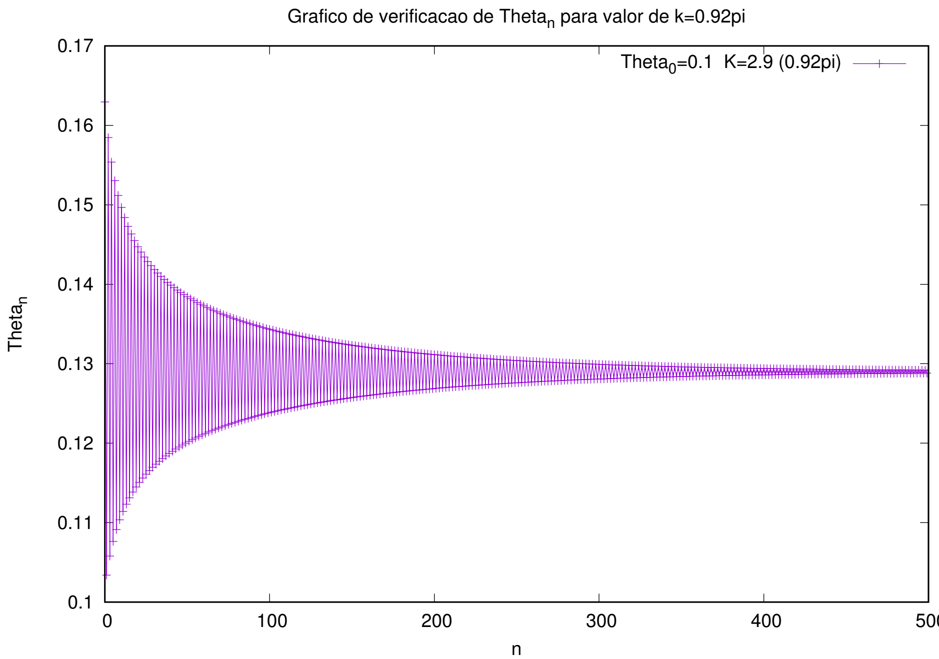


Figura 3: Gráficos da evolução de θ_n com n para valor de $k = 0.92\pi$ - próximo ao limite do intervalo de estabilidade.

Como esperado, a função converge para uma solução assimptótica, mesmo que demorando mais tempo.

Na Figura 4 abaixo, pode-se ver o que acontece quando k está fora do intervalo de estabilidade determinado anteriormente ($k < \frac{2\pi}{3}$):

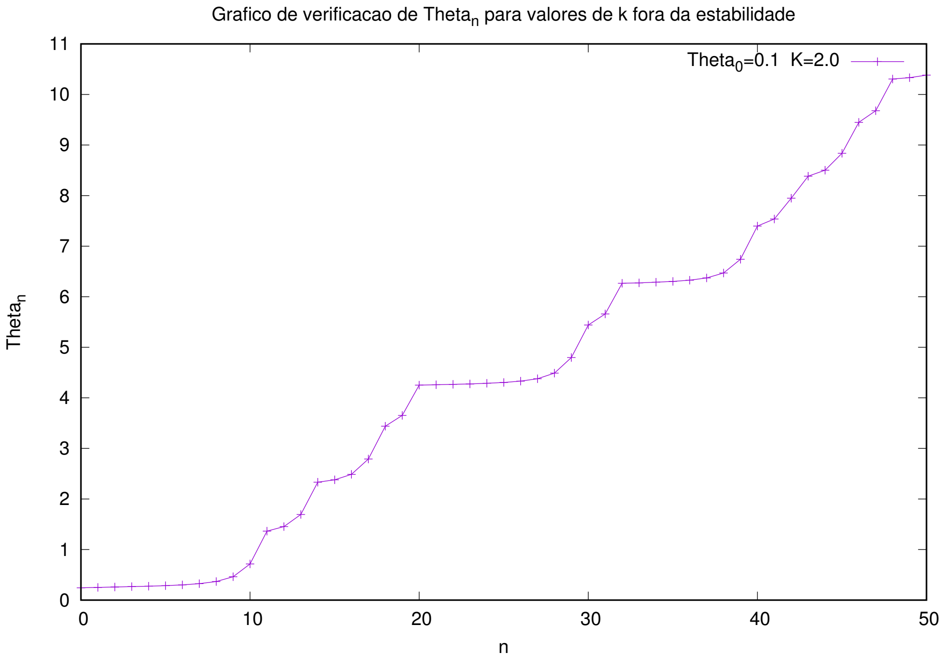


Figura 4: Gráfico da variação de k versus n para valores de k fora do intervalo de estabilidade. $k = 2.0$, $k < \frac{2\pi}{3}$

Como era de se esperar, para valores de k fora do intervalo determinado de estabilidade, a função tende à situação caótica quando n aumenta. Neste caso até $n = 10$ a função estava dentro do domínio, na próxima iteração os valores começaram a crescer de forma instável (situação caótica).

2 Encontrando Pontos fixos de 2^a ordem

Para encontrar pontos fixos de segunda ordem, fazemos $f(f(\theta_n)) = \theta_n$, que significa $\theta_{n+2} = \theta_n$, e para esta igualdade encontramos regimes cíclicos e sua estabilidade conforme foi feito na seção anterior.

Assim fazemos a substituição $f(f(\theta_n))$:

$$f(f(\theta_n)) = \theta_n + 2\omega - \frac{k}{2\pi}\left[sen(2\pi\theta_n) + sen(2\pi(\theta_n + \frac{k}{2\pi}sen(2\pi\theta_n)))\right], \tag{6}$$

Igualando $f(f(\theta_n)) = \theta_n$:

$$\frac{4\pi\omega}{k} = sen(2\pi\theta_n) + sen(2\pi(\theta_n + \frac{k}{2\pi}sen(2\pi\theta_n))). \tag{7}$$

Equação que se tornaria um tanto difícil, senão impossível, de isolar somente os termos θ_n em um lado da igualdade. Porém podemos ter uma ideia do que acontece com a função 1 para valores de k maiores do que o intervalo de estabilidade para os pontos fixos de primeira ordem determinado anteriormente se executarmos um programa que roda a função 1 com valores de k a partir de 0.92π.

O programa utilizado para tal tarefa é o mesmo identificado anteriormente na seção para verificação da estabilidade de pontos fixos, porém agora com o parâmetro k variando de 0.92π até 4π.

Obteve-se os seguintes resultados para um dos primeiros valores de $k > 0.92\pi$:

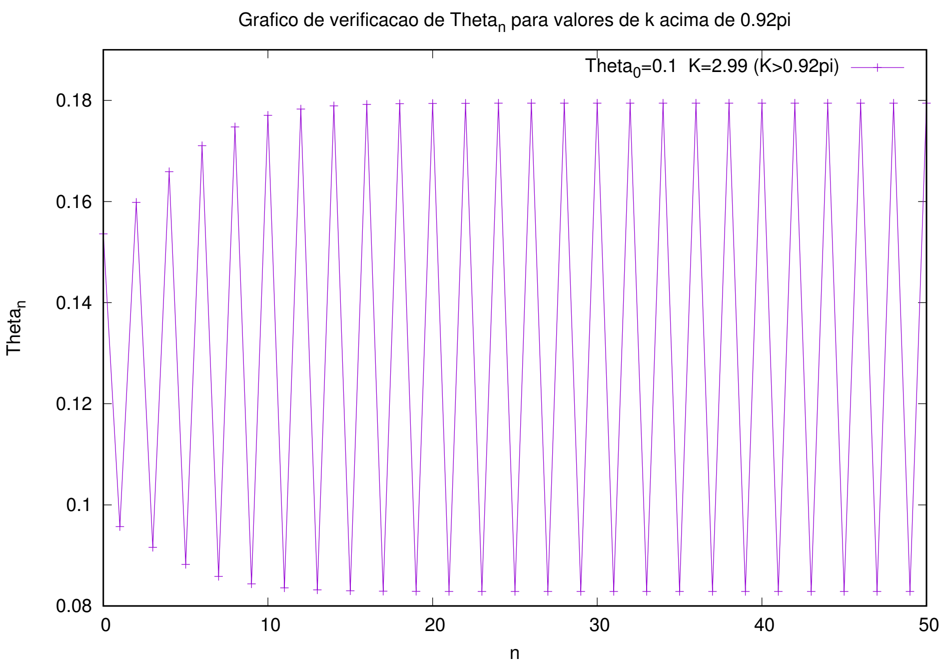


Figura 5: Gráfico de Θ_n por n com $k = 2.99$, $k > 0.92\pi$.

No gráfico da Figura 5 pode-se verificar que θ_n oscila entre dois valores fixos quando n aumenta, isto significa uma órbita de período 2, que são os pontos fixos de segunda ordem. Com isso pode-se concluir que já para $k > 0.92\pi$ obtém-se pontos fixos de segunda ordem.

Vamos agora verificar até que valor de $k > 0.92\pi$ tem-se soluções de órbita de segunda ordem. Para isto, uma forma mais prática de se encontrar o intervalo de estabilidade dos pontos fixos é fazendo o diagrama de bifurcações, no qual varia-se o parâmetro k de 0 até 4π e para cada valor individual de k se faz um número grande de n iterações, salvando-se os últimos passos de θ_n, os quais já chegaram na situação assimptótica. Então *plota*-se o gráfico dos valores de k por θ_n.

3 Diagrama de Bifurcações

Com o diagrama de bifurcações podemos verificar para quais valores do parâmetro k ocorrem bifurcações, que são aumento do período da órbita.

A base do programa utilizado para a elaboração do diagrama de bifurcações foi o seguinte:

```
neq=700; //numero de iteracoes para cada valor de k
nprod=300; //quantidade de primeiros valores de theta que serao descartados
x0=0.1; //theta inicial
x=x0;

li=(0); // k inicial
lf=(4*M_PI); // k final

dl=(lf-li)/400.0; // divisao de intervalos de k

l=li;

while(l<lf) // while para a variacao de k
{
    x=x0; // reinicia o valor do theta zero
    n=1; // reinicia o valor do tempo n

    while(n<neq)  // inicia os calculos de theta
    {
      x=(x+(1.0/3.0)-((l/(2*M_PI))*(sin(2*M_PI*x))));

      if(n>nprod) // so salva os 400 utlimos valores de theta para cada k
      {
      fprintf(arq1,"%d %.12lf %.12lf\n",n,x,l);
      }
      n=n+1;
    }
 l=l+dl;
 }
```

A partir deste programa, foi gerado o seguintes gráfico de θ_n versus k:

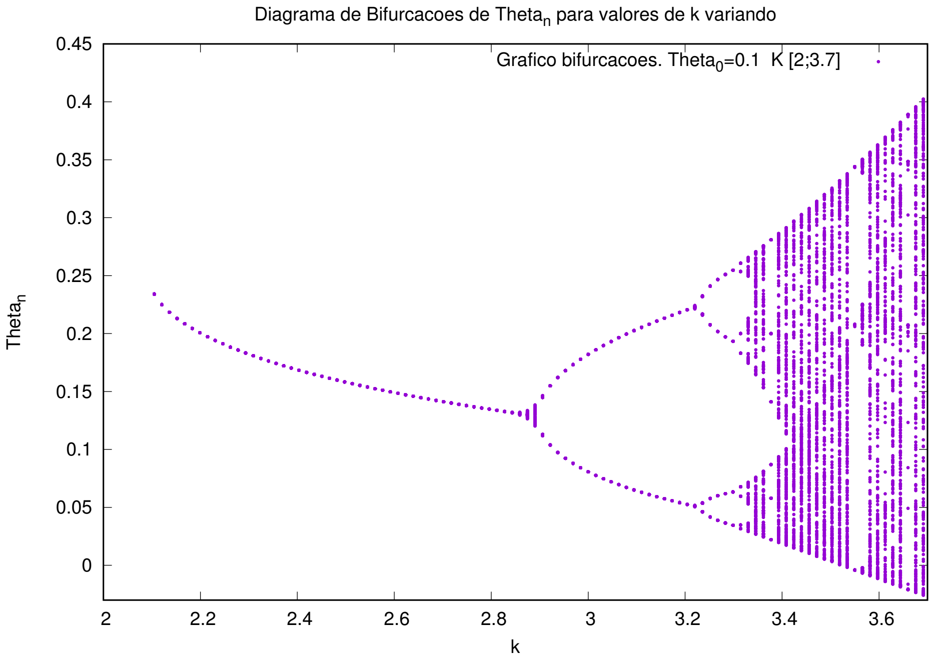


Figura 6: Diagrama de bifurcações de Θ_n por k.

Na Figura 6 pode-se verificar o intervalo de convergência que foi encontrado na primeira seção, para $\frac{2\pi}{3} < k < 0.92\pi$, e também que a partir de k maior que este intervalo os valores de θ_n começam a oscilar entre duas soluções até $k \approx 3.2$, que é onde ocorre novamente bifurcação das soluções para quatro valores. Após esta bifurcação que ocorre no intervalo de k $[3.2, 3.3]$, o sistema entra em estado de caos.

Na figura 7 abaixo, podemos verificar o diagrama de bifurcações completo, para o intervalo de k $[0, 4\pi]$.

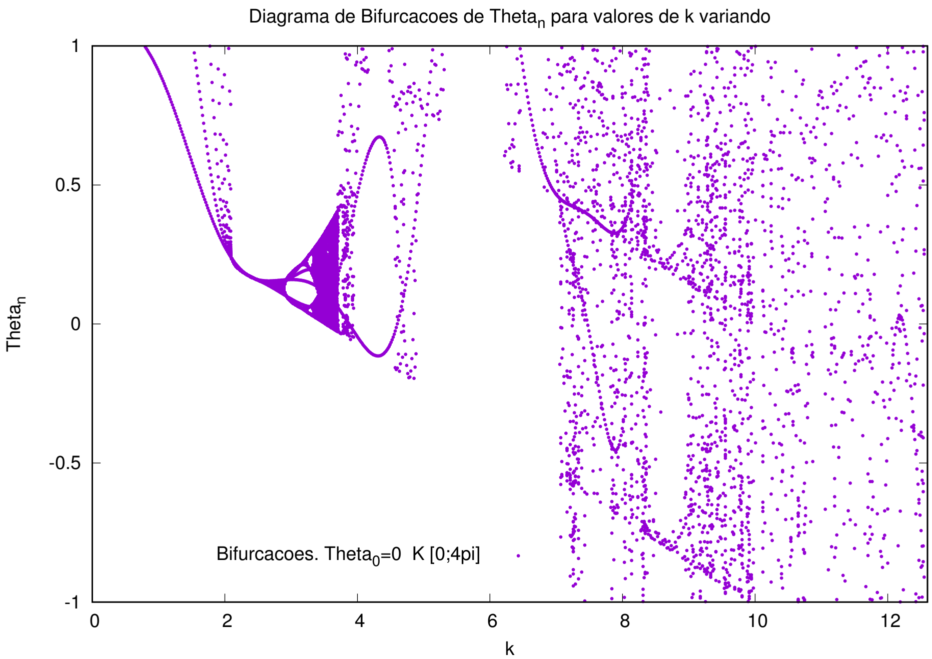


Figura 7: Diagrama de bifurcações de Θ_n por k. Intervalo de k $[0; 4\pi]$

É possível notar que existem vários intervalos em que o sistema está numa situação caótica, porém existem "ilhas"de estabilidade em alguns pontos em meio ao caos. Isto será especificado e aprofundado na próxima seção. Também pode-se notar que para o intervalo de θ_n entre $[-1, 1]$ a região onde existem mais soluções assimptóticas são aquelas para as quais os valores de k estão entre 2 e 4, pois é onde tem maior densidade de pontos.

4 Expoente de Lyapunov

A taxa com que as distâncias entre duas trajetórias aumenta ou diminui com o tempo está relacionada com uma quantidade chamada de *expoente de Lyapunov*.

O expoente de Lyapunov é definido como:

$$\lambda_L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ln|f'(\theta_i)|. \tag{8}$$

A análise do valor de λ_L é a seguinte: se $\lambda_L > 0$, as trajetórias vizinhas se distanciam umas das outras conforme o tempo n avança, e caracterizam um comportamento caótico; se $\lambda_L < 0$, as trajetórias convergem para um valor fixo ou um limite cíclico, caracterizam estabilidade do sistema, elas se aproximam.

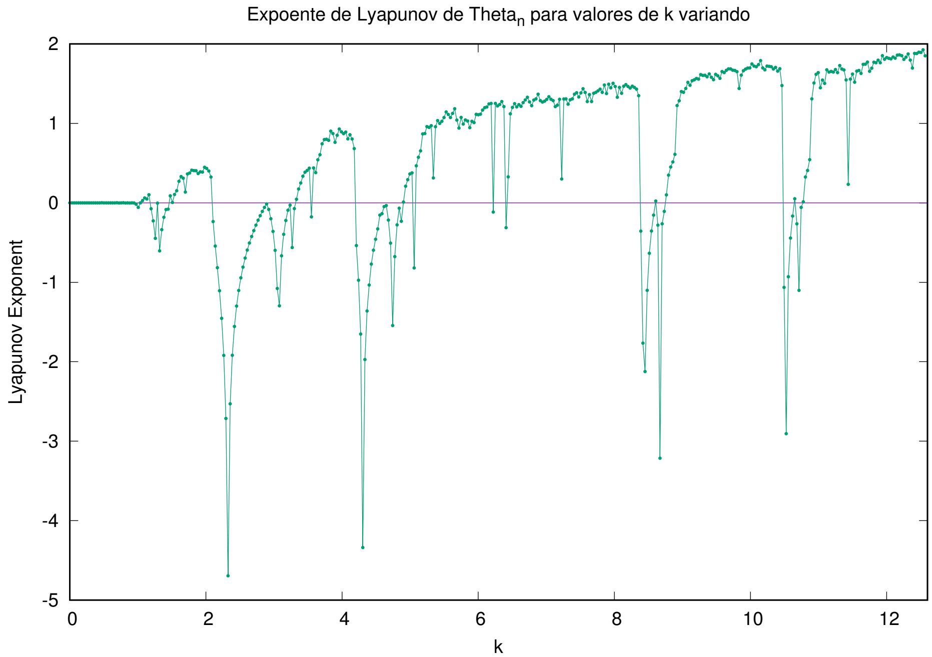
Foi feito um programa para o cálculo do expoente de Lyapunov para a sistema estudado para o intervalo de k de $[0, 4\pi]$. O programa realiza o cálculo de 400 valores de θ_i e salva os últimos 300, que é onde o sistema já alcançou algum ponto fixo ou período cíclico. O programa calcula o expoente de Lyapunov para cada valor de k. A base do programa é a seguinte:

```
  while(l<lf) // while para variacao de k
    {
      x=x0; // retorna a posicao inicial
      n=1;

      while(n<neq) // inicia os neq=400 calculos de theta e lyapunov para um dado k
{

  x=(x+(1.0/3.0)-((l/(2*M_PI))*(sin(2*M_PI*x)))); // calcula theta

  lyap = lyap + log(fabs(derivada(x,l,omega))); // soma os ln da derivada de theta_i

      if(n>nprod) // guarda somente os ultimos pontos de theta
      {
       if((fabs(x))<=1) fprintf(arq1,"%d %.12lf %.12lf\n",n,x,l);
      }
  n=n+1;
}

  lyap = (lyap)/neq; // finaliza o calculo do expoente de lyapunov para este k

      fprintf(arq2,"%.12lf %.12lf\n",l,lyap);
      l=l+dl;
      lyap=0.0; //zera o valor de lyapunov, para calcular o do proximo k
    }
```

Onde a função *derivada* corresponte à equação 4 e é a seguinte:

```
double derivada (double d, double e, double f )
{
    return (1-((e)*(cos(2*M_PI*d)))); //d=theta, e=k, f=omega;
}
```

Na figura 8 podemos verificar a comparação do diagrama de bifurcações com o expoente de Lyapunov para cada valor de k, o que condiz com o que foi verificado anteriormente, que para os valores de k em que há pontos fixos e fases cíclicas de θ_n o expoente de Lyapunov é negativo, e em alguns casos quando ele está na iminência de passar de 0 e ficar positivo o sistema entra em bifurcação das soluções de θ_n (fase cíclica) e o expoente de Lyapunov fica negativo novamente.



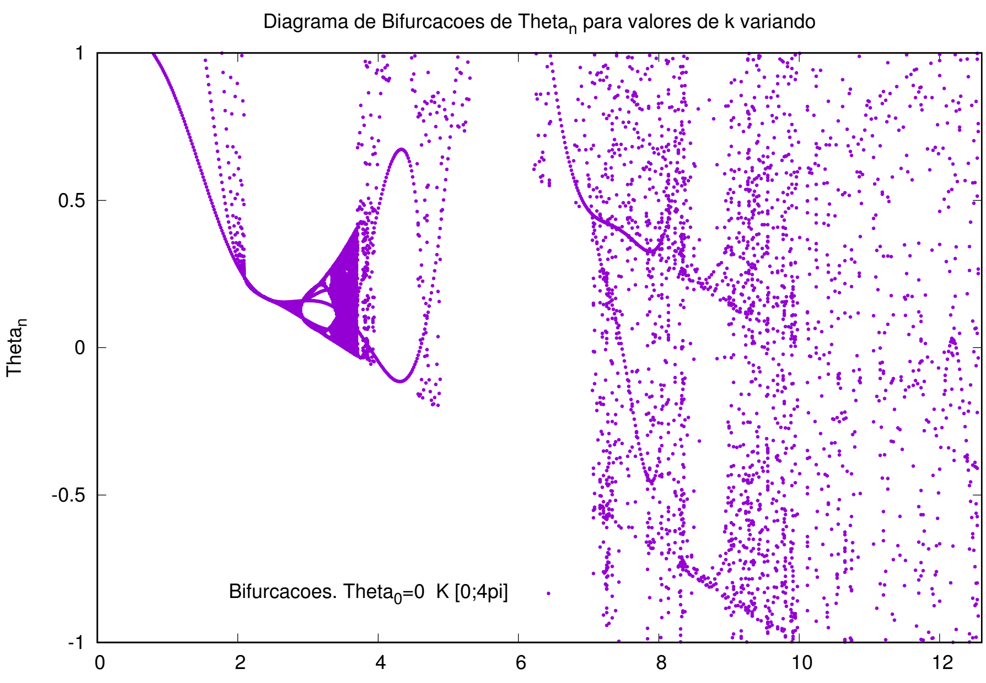
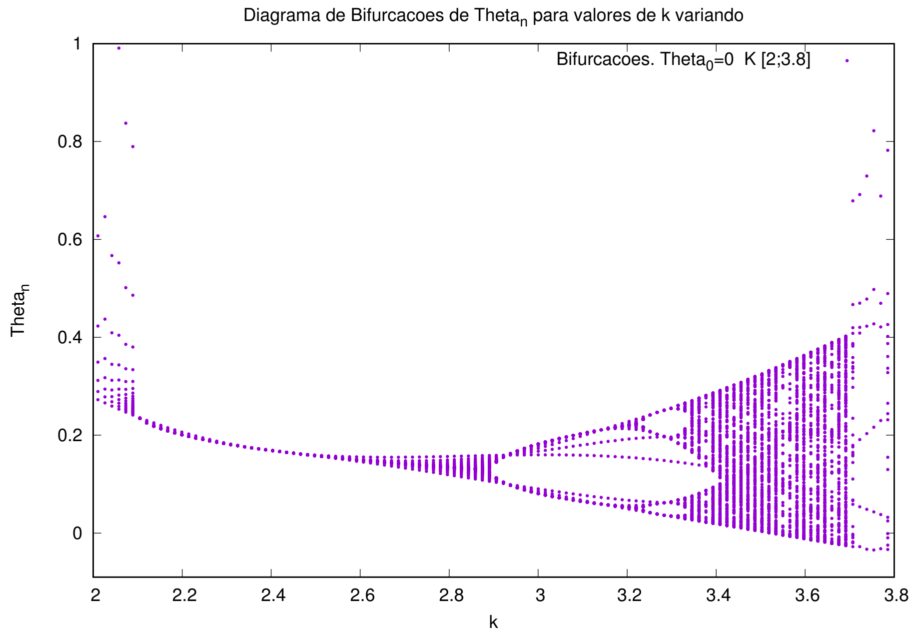


Figura 8: Expoente de Lyapunov e o Diagrama de bifurcações de Θ_n por k. Intervalo de k $[0; 4\pi]$

Agora vamos mudar o *range* dos gráficos para o intervalo estudado anteriormente, de k entre $\frac{2\pi}{3}$ e 0.92π:



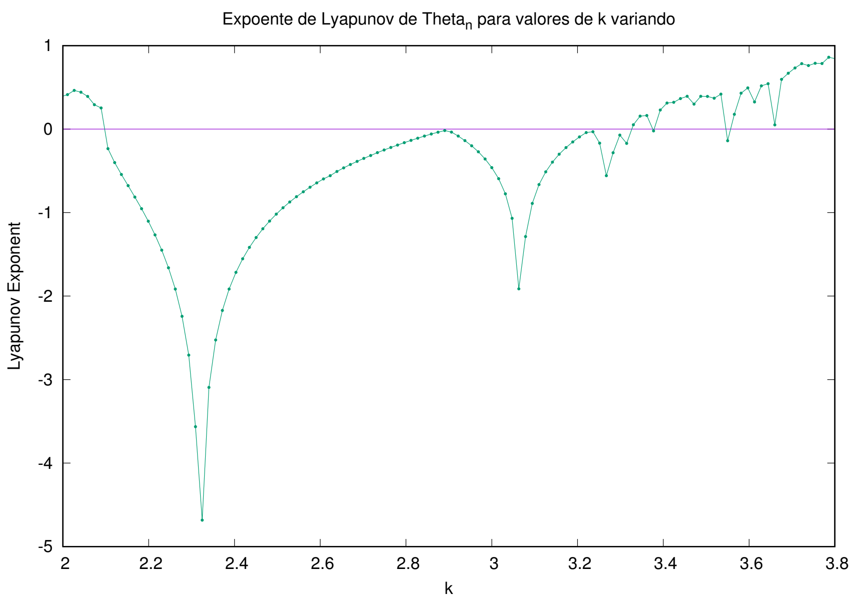


Figura 9: Expoente de Lyapunov e o Diagrama de bifurcações de Θ_n por k. Intervalo de k $[2; 3.8]$

Conforme esperado, podemos verificar que as bifurcações condizem com expoentes de Lyapunov que estão muito próximos de zero e que para valores negativos do expoente de Lyapunov encontramos pontos fixos e fases cíclicas para θ_n, e para valores positivos do expoente de Lyapunov encontramos o sistema em uma fase caótica.

5 Conclusões Gerais

Após as análises realizadas, pode-se concluir que é possível prever fases cíclicas, pontos fixos e fases caóticas de um sistema dinâmico através de cálculos analíticos e verificar com cálculos numéricos através do diagrama de bifurcações e do cálculo do expoente de Lyapunov comprovando os resultados esperados. Mesmo que o sistema seja difícil, senão impossível, de ser estudado analíticamente, pode-se utilizar métodos de cálculo numérico para prever situações deste sistema.

Referências

[1] "Arnold tongue"Disponível em "`http://en.wikipedia.org/wiki/Arnold_tongue`"

[2] Romeira, Bruno "Chaotic Dynamics in Resonant Tunneling Optoelectronic Voltage Controlled Oscillators"Departmento de Fis., Univ. do Algarve, Faro, Portugal